Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Charakteristisches Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1)
Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen, indem Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -9 & -24 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (2)
Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen, indem Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen:

a) $\begin{pmatrix} -9 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -10 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (3)
Sei A eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus einem Körper $\mathbb{K}$. Das heißt, es gibt eine Basis von Eigenvektoren und eine entsprechende Basentransformationsmatrix S, so dass $D = S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Zeigen Sie, dass man mithilfe dieser Basentransformation ganz einfach beliebige Potenzen von A berechnen kann, indem Sie folgende Identität beweisen: $A^k = SD^kS^{-1}$.

Aufgabe 4 (2)
Bringen Sie die folgenden Matrizen mit reellen Einträgen auf Diagonalgestalt, indem Sie eine passende Basentransformation durchführen. Beachten Sie, dass die Matrizen Darstellungsmatrizen einer linearen Abbildung bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -10 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ 9 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -\frac{3}{5} & -3 & \frac{6}{5} \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -9 & 11 & 34 \\ 4 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -5 & -26 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -17 & -12 & 6 \\ -12 & -8 & 6 \\ -60 & -42 & 25 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix}$